



Zentralübung Rechnerstrukturen: Parallelismus und Parallele Programmierung

4. Übungsblatt – Musterlösung

1 Parallelismus

1.1 Leistungsbewertung

a)

$$E(n) = \frac{S(n)}{n} \Rightarrow E(16) = \frac{S(16)}{16} = \frac{8}{16} = 0,5$$

$$S(n) = \frac{T(1)}{T(n)} \Rightarrow T(16) = \frac{T(1)}{S(16)} = \frac{80}{8} = 10$$

$$I(16) = \frac{P(n)}{T(n)} \Rightarrow I(16) = \frac{P(16)}{T(16)} = \frac{120}{10} = 12$$

b) Der Parallelindex gibt den mittleren Grad der Parallelität an, d.h. die Anzahl der parallelen Operationen pro Zeiteinheit. Der berechnete Wert ist kleiner als die Anzahl der Prozessoren. Das bedeutet, dass zeitweise einige Prozessoren keinen Befehl ausführen.

Besser verdeutlicht wird dies durch Berechnung der Auslastung U , die angibt wieviel Operationen jeder Prozessor im Durchschnitt pro Zeiteinheit ausführt.

$$U(n) = \frac{I(n)}{n} \Rightarrow U(16) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 75\%$$

c) Amdahls Gesetz:

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{(1-a)}{n} * T(1) + a * T(1) \\ &= T(1) * \left(\frac{(1-a)}{n} + a \right) \\ &= T(1) * \frac{1-a+na}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 10 &= 80 * \frac{1-a+16a}{16} \\
&= 80 * \frac{1+15a}{16} \\
&= 5 * (1+15a) \\
\Rightarrow 15a &= 1 \Rightarrow a = \frac{1}{15} \approx 6,7\%
\end{aligned}$$

$\approx 6,7\%$ des Programmcodes sind nur sequentiell ausführbar.

1.2 Leistungsbewertung

a) Parallele Ausführungszeit von n Prozessoren:

$$\begin{aligned}
T(n) &= \frac{80\%}{n} * T_{seq} + 20\% * T_{seq} \\
\text{Beschleunigung: } S(n) &= \frac{T_{seq}}{T(n)} \\
\text{Effizienz: } E(n) &= \frac{S(n)}{n}
\end{aligned}$$

Prozessoren	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$
Beschleunigung	$5/3 = 1,67$	$5/2 = 2,50$	$10/3 = 3,33$	4	$40/9 = 4,44$
Effizienz	$5/6 = 0,83$	$5/8 = 0,625$	$10/24 = 0,42$	$1/4 = 0,25$	$5/36 = 0,14$

Achtung: In der Klausur bei Berechnungen wenn möglich Brüche statt gerundete Zahlen als Ergebnisse angeben!

b) Die Skalierbarkeit ist sehr schlecht. Grund dafür ist, dass ein großer Anteil des Programms nicht parallelisierbar ist. Die Ausführungszeit dieses Anteils bestimmt mit steigender Anzahl von Prozessoren einen zunehmenden Anteil der gesamten Ausführungszeit.

$$\text{Beschleunigung: } S(n) = \frac{T_{seq}}{(20\% + \frac{80\%}{n}) * T_{seq}} \xrightarrow{n \text{ sehr groß}} \frac{1}{20\%} = 5$$

c) Kommunikationskosten:

$$\begin{aligned}
\text{Beschleunigung: } S(n) &= \frac{T_{seq}}{(20\% + \frac{80\%}{n} + 1\% * n) * T_{seq}} \\
\Rightarrow S(64) &\approx 1,17 \\
\text{Effizienz: } E(64) &= \frac{1,17}{64} \approx 0,018
\end{aligned}$$

1.3 Leistungsbewertung

Die Ausführungszeiten lassen sich in beiden Fällen wiederum mit Hilfe von Amdahls Gesetz ausrechnen und damit auch die erreichte Beschleunigung vergleichen. T_{seq} ist hierbei die Zeit ohne Parallelisierung oder Koprozessorunterstützung.

- SMP-System:

$$T_{SMP} = 74\% * \frac{1}{2} * T_{seq} + 26\% * T_{seq} + 2\% * T_{seq} = 65\% * T_{seq}$$
$$S_{SMP} = \frac{T_{seq}}{T_{SMP}} = \frac{1}{65\%} \approx 1,5385$$

- System mit Koprozessor:

$$T_{CP} = 40\% * \frac{1}{10} * T_{seq} + 60\% * T_{seq} = 64\% * T_{seq}$$
$$S_{CP} = \frac{T_{seq}}{T_{CP}} = \frac{1}{64\%} \approx 1,5625$$

Die Koprozessorlösung ist für diese Anwendung deshalb dem SMP-System vorzuziehen. Ohne Beachtung der benötigten Synchronisationszeit würde die Berechnung ein fehlerhaftes Ergebnis liefern.

2 Parallele Programmierung

- a) SMP-Knoten mit P Prozessoren und einem gemeinsamen Speicher

Sequentielle Zeit $T(1)$:

$$\underbrace{5n^2}_{\text{Daten aus Speicher holen}} + \underbrace{n^2}_{\text{Berechnung}} + \underbrace{n^2}_{\text{Zurückschreiben}} = 7n^2$$

Parallele Zeit $T(P)$:

$$\underbrace{5n^2}_{\text{Daten aus Speicher holen}} + \underbrace{\frac{n^2}{P}}_{\text{par. Berechnung}} + \underbrace{n^2}_{\text{Zurückschreiben}} = 6n^2 + \frac{n^2}{P}$$

Beschleunigung $S(P)$:

$$S(P) = \frac{T(1)}{T(P)} = \frac{7n^2}{6n^2 + \frac{n^2}{P}} = \frac{7}{6 + \frac{1}{P}} < \frac{7}{6} \approx 1,17$$

Das Problem ist hierbei, dass der Speicher als limitierender Faktor wirkt und damit die Beschleunigung stark beschränkt ist.

- b) NUMA-Architektur mit P Prozessoren und P lokalen, aber gemeinsamen Speichern

Sequentielle Zeit $T(1)$:

$$\underbrace{5n^2}_{\text{Daten aus Speicher holen}} + \underbrace{n^2}_{\text{Berechnung}} + \underbrace{n^2}_{\text{Zurückschreiben}} = 7n^2$$

Parallele Zeit $T(P)$:

$$\underbrace{\frac{4 * 2 * n^2}{P}}_{\substack{\text{4 Werte der} \\ \text{Nachbarknoten} \\ \text{aus entferntem} \\ \text{Speicher}}} + \underbrace{\frac{n^2}{P}}_{\substack{\text{eigener Wert} \\ \text{im lokalen} \\ \text{Speicher}}} + \underbrace{\frac{n^2}{P}}_{\substack{\text{parallele} \\ \text{Berechnung}}} + \underbrace{\frac{n^2}{P}}_{\substack{\text{Zurückschreiben} \\ \text{in lokalen} \\ \text{Speicher}}} = \frac{11n^2}{P}$$

Daten aus Speicher holen

Beschleunigung $S(P)$:

$$S(P) = \frac{T(1)}{T(P)} = \frac{7n^2}{\frac{11n^2}{P}} = \frac{7}{11}P$$

$$\text{für } P = 2: S(2) = \frac{14}{11} \approx 1,27$$

$$\text{für } P = 3: S(3) = \frac{21}{11} \approx 1,90$$

⇒ Die Beschleunigung skaliert mit $\frac{7}{11}$ der Problemgröße (linear).